Eine auf Vermutungen beruhende Untersuchung über die Integralformel $\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(\alpha+\beta\cos\varphi)^n}$*

Leonhard Euler

§1 Wir wollen mit dem einfachsten Fall beginnen, in welchem $i = 0$ und $n = 1$ ist, und diese Formel als zu integrieren vorgelegt wird

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha + \beta\cos\varphi},$$

um was zu leisten, am besten diese Substitution

$$\tan\frac{1}{2}\varphi = t$$

zur Hilfe genommen wird, woher sofort

$$\partial\varphi = \frac{2\partial t}{1+tt}$$

wird; weil daher weiter

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+tt}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tt}}$$

ist, wird auch

*Originaltitel: "Disquitio coniecturalis super formula integrali $\int \frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{(\alpha+\beta\cos\varphi)^n}$", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1794, verfasst 1778): pp. 217–242, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 168 – 196, Eneström-Nummer E673, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\cos\varphi = \frac{1-tt}{1+tt}$$

sein und daher der Nenner unserer Formel

$$\alpha + \beta\cos\varphi = \frac{\alpha+\beta+(\alpha-\beta)tt}{1+tt}$$

und unsere zu integrierende Formel wird

$$\int \frac{2\partial t}{\alpha+\beta+(\alpha-\beta)tt}$$

sein.

§2 Es ist aber aus den Element bekannt, dass

$$\int \frac{\partial t}{f+gtt} = \frac{1}{\sqrt{fg}}\arctan t\sqrt{\frac{g}{f}}$$

ist. Weil also für unseren Fall $f = \alpha+\beta$ und $g = \alpha-\beta$ ist, werden wir diese Integration haben

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta}}\arctan t\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}},$$

während $t = \tan\frac{1}{2}\varphi$ ist, welches Integral also im Fall $t = 0$ und daher im Fall $\varphi = 0$ verschwindet. Wenn wir daher also dieses Integral von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zur Grenze $\varphi = 180^\circ$ erstrecken, wo $t = \infty$ wird, wird dieses Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha\alpha-\beta\beta}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

sein, während π den halben Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius $= 1$ ist.

§3 Weil also das Integral unserer Formel von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zur Grenze $\varphi = 180^\circ$ so kurz und knapp ausgedrückt wird, werde ich auch allgemein in dieser Abhandlung nur die Integrale der vorgelegten allgemeinen Formel

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(\alpha + \beta \cos \varphi)^n}$$

untersuchen, welche zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ genommen werden. Weil aber in dem behandelten Fall die irrationale Formel $\sqrt{\alpha\alpha - \beta\beta}$ enthalten ist, werden wir, um diese Unannehmlichkeit zu beseitigen, im folgenden immer

$$\alpha = 1 + aa \quad \text{und} \quad \beta = -2a$$

annehmen, woher

$$\sqrt{\alpha\alpha - \beta\beta} = 1 - aa$$

wird, und so werden sich unsere Untersuchungen um die Integration dieser allgemeinen Formel drehen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1 + aa - 2a\cos\varphi)^n},$$

für welche wir überall der Kürze wegen

$$1 + aa - 2a\cos\varphi = \Delta$$

setzen wollen, dass unsere allgemeine Formel nun

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^n}$$

ist, wo, wie schon bemerkt worden ist, uns nur vorgelegt ist, den Wert des Integrals zu ermitteln, wenn es zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ genommen wird, welchen Wert wir aus speziellen Fällen zu erschließen versuchen werden. Außerdem sei hier im Allgemeinen angemerkt, dass der Buchstabe i für uns immer keine anderen Zahlen bezeichnet als ganze positive bedeutet, weil ja immer

$$\cos(-i\varphi) = \cos(+i\varphi)$$

ist.

I. ÜBER DIE INTEGRATION DER FORMEL

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

§4 Dieser Fall ist also im allgemeinen enthalten, indem der Exponent $n = 1$ gesetzt wird, welchen Fall wir also den einfachsten ansehen wollen, weil der Fall $n = 0$ freilich überhaupt keine Mühe bereitet, weil

$$\int \partial\varphi \cos i\varphi = \frac{1}{i} \sin i\varphi$$

ist, welches Integral schon im Fall $i = 0$ verschwindet, und weil ja i nur ganze Zahlen bezeichnet, verschwindet für $\varphi = 180^\circ$ dieses Integral immer, einzig ausgenommen in dem Fall, in dem $i = 0$ ist und in welchem das Integral $= \varphi$ werden wird und daher für $\varphi = 180^\circ$ genommen für die festgelegten Integrationsgrenzen $\int \partial\varphi = \pi$ sein wird.

§5 Dieser letzte Fall enthält das Fundament, aus welchem die Integrale der hier vorgelegten Form geschöpft werden sollten; weil nämlich

$$\partial\varphi = \frac{(1+aa)\partial\varphi}{\Delta} - \frac{2a\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta}$$

ist, wird durch Integrieren für die vorgeschriebenen Grenzen

$$\pi = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} - 2a\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta}$$

sein; oben haben wir aber gesehen, dass

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$$

ist, nach Einsetzen welches Wertes die Integration des Falls $i = 1$ erhalten wird; weil nämlich

$$\pi = \frac{(1+aa)\pi}{1-aa} - 2a\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta}$$

ist, wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a}{1-aa}$$

sein, und so haben schon zwei Fälle erhalten, welche

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa} \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a}{1-aa}$$

sind.

§6 Aus diesen zwei Fällen $i = 0$ und $i = 1$ lassen sich aber alle folgenden ohne Mühe mithilfe dieses Lemmas ableiten; weil, wie wir gesehen haben,

$$\int \partial\varphi \cos i\varphi = 0$$

ist, wird

$$0 = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{\Delta} - 2a\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi\cos i\varphi}{\Delta}$$

sein. Es ist aber bekannt, dass

$$2\cos\varphi\cos i\varphi = \cos(i-1)\varphi + \cos(i+1)\varphi$$

ist, woher wir diese Gleichung haben

$$\frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{\Delta} = \int \frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{\Delta} + \int \frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{\Delta},$$

woraus dieses Lemma entspringt

$$\int \frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{\Delta}.$$

Nachdem nun $i = 1$ genommen worden ist, gibt dieses Lemma uns diesen Fall an die Hand

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi}{\Delta},$$

welcher also durch die beiden vorhergehenden erledigt wird; es wird nämlich

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta} = \frac{\pi aa}{1-aa}$$

werden. Man nehme nun $i = 2$ und das Lemma wird uns

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^3}{1-aa}$$

geben; in gleicher Weise wird das Lemma für $i = 3$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^4}{1-aa}$$

geben. Weiter liefert der Fall $i = 4$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^5}{1-aa}$$

und so weiter.

§7 Daher ist also klar, dass diese einzelnen Werte aus den zwei vorhergehenden mithilfe der Verhältnisskala

$$\frac{1+aa}{a}, \quad -1$$

bestimmt werden und die daher zu entspringende rekurrente Reihe in eine geometrische übergeht; wenn nämlich die zwei letzten Terme schon gefunden waren,

$$\frac{\pi a^\lambda}{1-aa} \quad \text{und} \quad \frac{\pi a^{\lambda+1}}{1-aa},$$

wird der folgende

$$= \frac{\pi a^{\lambda+2}}{1-aa}$$

gefunden; daher folgt also ohne Zweifel, dass für den an dieser Stelle behandelten Spezialfall im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}$$

sein wird, wo wiederum sorgsam zu bemerken ist, dass anstelle von i nur ganze positive Zahlen angenommen werden müssen.

II. Über die Integration der Formel

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

§8 Hier wird der Fall $\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2}$ als der einfachste auftreten, dessen Integral also vor allen anderen untersucht werden muss; für dieses Ziel wollen wir diese endliche Formel betrachten

$$\frac{\sin\varphi}{\Delta} = V,$$

welche für jede der beiden Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ verschwindet; daher wird aber

$$\partial V = \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta} - \frac{2a\partial\varphi\sin^2\varphi}{\Delta^2}$$

oder

$$\partial V = \frac{(1+aa)\partial\varphi\cos\varphi - 2a\partial\varphi}{\Delta^2};$$

daher wissen wir durch Integration schon, dass

$$0 = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}$$

ist. Aber weiter, weil wir ja zuvor

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$$

gefunden haben, wird durch Erweitern der Integralformel mit Δ auch

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}$$

sein. Aus dem Vorhergehenden berechnet man

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^2} = \frac{2a}{1+aa} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2}$$

nach Einsetzen welches Wertes wir

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa) \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - \frac{4aa}{1+aa} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1-aa)^2}{1+aa} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2}$$

haben werden; deswegen erhalten wir daraus diese grundlegende Integration

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

woher man direkt den folgenden Fall

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^2} = \frac{2\pi a}{(1-aa)^3}$$

ableitet.

§9 Für die folgenden Fälle wollen wir die im vorhergehenden Abschnitt gefundene Integration

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}$$

betrachten, welche Integralformel durch Erweitern mit Δ in die folgenden zwei Teile aufgeteilt wird

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa) \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} - 2a \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2},$$

welche Gleichung weiter in diese Form entwickelt wird

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa) \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} - a \int \frac{\partial\varphi \cos(i-1)\varphi}{\Delta^2} - a \int \frac{\partial\varphi \cos(i+1)\varphi}{\Delta^2},$$

woher man dieses Lemma ableitet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos(i+1)\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos(i-1)\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^{i-1}}{1-aa}.$$

§10 Wir wollen nun sofort $i = 1$ setzen und dieses Lemma liefert uns

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi}{1-aa};$$

hier setze man nun die zwei schon gefundenen Werte ein und man wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa) - \pi(1-aa)^2}{(1-aa)^3}$$

finden; daher folgt also, dass

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(3aa - a^4)}{(1-aa)^3} = \frac{\pi aa(3-aa)}{(1-aa)^3}$$

sein wird. Man nehme nun für das vorausgeschickte Lemma $i = 2$ und es wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a}{1-aa}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1+aa)\pi a(3-aa) - 2\pi a - \pi a(1-aa)^2}{(1-aa)^3}$$

sein, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3(4-2aa)}{(1-aa)^3}.$$

Es nun im vorausgeschickten Lemma $i = 3$ und es wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a} \int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi aa}{1-aa}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1+aa)\pi aa(4-2aa) - \pi aa(3-aa) - \pi aa(1-aa)^2}{(1-aa)^3}$$

sein, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^4(5-3aa)}{(1-aa)^3}.$$

Es sei nun in unserem Lemma $i=4$ und es wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^3}{1-aa}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1+aa)\pi a^3(5-3aa) - \pi a^3(4-2aa) - \pi a^3(1-aa)^2}{(1-aa)^3}$$

sein, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^5(6-4aa)}{(1-aa)^3}.$$

Es sei nun in unserem Lemma $i=5$ und es wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^4}{1-aa}$$

oder

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1+aa)\pi a^4(6-4aa) - \pi a^4(5-3aa) - \pi a^4(1-aa)^2}{(1-aa)^3}$$

sein, welcher Ausdruck zu diesem zusammengezogen wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^6(7-5aa)}{(1-aa)^3}.$$

§11 Wer diese Formeln und deren Entstehung genauer betrachtet, wird gewiss in keiner Weise bezweifeln, daraus diese Folgerung abzuleiten, dass im Allgemeinen für den hier vorgelegten Fall

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i(i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}$$

sein wird; weil das Bildungsgesetz nicht so offensichtlich ist wie im vorhergehenden Fall, wollen wir alle gefundenen Formeln zusammen auflisten

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a(2-0aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi aa(3-aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3(4-2aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^4(5-3aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^5(6-4aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi\cos 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^6(7-5aa)}{(1-aa)^3}.$$

III. ÜBER DIE INTEGRATION DER FORMEL

$$\int \frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{\Delta^3}\begin{bmatrix}\text{von} & \varphi = 0\\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ\end{bmatrix}$$

§12 Für das Finden des einfachsten Falls $\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3}$ wollen wir diese Formel gebrauchen

$$V = \frac{\sin\varphi}{\Delta^2}$$

und es wird

$$\partial V = \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} - \frac{2\partial\varphi\sin^2\varphi}{\Delta^3}$$

oder

$$\partial V = \frac{(1+aa)\partial\varphi\cos\varphi - 2a\partial\varphi\cos^2\varphi - 4a\partial\varphi\sin^2\varphi}{\Delta^3}$$

sein. Hier schreibe man $1 - \cos^2 \varphi$ anstelle von $\sin^2 \varphi$ und durch Integrieren werden wir wegen $V = 0$ diese Gleichung haben

$$0 = (1 + aa) \int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} - 4a \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} + 2a \int \frac{\partial\varphi \cos^2\varphi}{\Delta^3}.$$

§13 Hierzu wollen wir diese unbestimmte Form addieren

$$s = A \int \frac{\partial\varphi}{\Delta} + B \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2},$$

deren Differential man auf den Nenner Δ^3 bringe, die Buchstaben A und B bestimme man hingegen so, dass die Terme $\partial\varphi \cos\varphi$ und $\partial\varphi \cos^2\varphi$ verschwinden, und nach Addieren der Differentialformeln wird

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^3(\partial V + \partial s)}{\partial\varphi} = -4a \qquad & + (1 + aa)\cos\varphi \qquad + 2a\cos^2\varphi \\ +A(1 + aa)^2 & - 4Aa(1 + aa)\cos\varphi + 4Aaa\cos^2\varphi \\ +B(1 + aa) & - 2Ba\cos\varphi.\end{aligned}$$

Nun setze man also, um den Term $\cos^2\varphi$ fortzuschaffen,

$$2a + 4Aaa = 0$$

und daher

$$A = \frac{-1}{2a}.$$

Nun werfe man auch die Terme $\cos\varphi$ aus der Mitte heraus und es wird

$$1 + aa - 4Aa(1 + aa) - 2Ba = 0$$

sein, woher

$$B = \frac{3(1 + aa)}{2a}$$

wird. Aus diesen Werten erlangen wir

$$\frac{\Delta^3(\partial V + \partial s)}{\partial\varphi} = \frac{(1 - aa)^3}{a};$$

daher werden wir also umgekehrt durch Integrieren

$$V + s = \frac{(1-aa)^2}{a} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3}$$

haben.

§14 Weil also, wie wir schon bemerkt haben, $V = 0$ ist und aus den schon behandelten Fällen

$$s = \frac{-1}{2a} \cdot \frac{\pi}{1-aa} + \frac{3(1+aa)}{2a} \cdot \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

werden wir diese Gleichung haben

$$\frac{(1-aa)^2}{a} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi(1+aa)^2 - \pi(1-aa)^2}{2a(1-aa)^3},$$

woher man

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5}$$

berechnet.

§15 Weil also

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3}$$

ist, wird mit der bisher benutzen Reduktion

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} = \frac{1+aa}{2a} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} - \frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3}$$

und daher

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} &= \frac{1+aa}{2a} \cdot \frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5} - \frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3} \\ &= \frac{3\pi a(1+aa)}{(1-aa)^5} = \frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5}\end{aligned}$$

sein.

§16 Weil wir also im vorausgehenden Abschnitt [§ 11]

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}$$

gefunden haben, werden wir nach Erweitern dieser Integralformel mit Δ

$$\frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3} = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} - 2a\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi \cos\varphi}{\Delta^3}$$

oder

$$\frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}$$
$$= (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} - a\int \frac{\partial\varphi \cos(i-1)\varphi}{\Delta^3} - a\int \frac{\partial\varphi \cos(i+1)\varphi}{\Delta^3}$$

haben; daher leitet man dieses Lemma ab

$$\int \frac{\partial\varphi \cos(i+1)\varphi}{\Delta^3}$$
$$= \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} - \int \frac{\partial\varphi \cos(i-1)\varphi}{\Delta^3} - \frac{\pi a^{i-1}(i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}.$$

§17 Wir wollen nun sofort $i = 1$ setzen und dieses Lemma liefert uns

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\Delta^3} - \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} - \frac{2\pi}{(1-aa)^3};$$

hier setze man nun die zwei schon gefundenen Werte ein und man wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1+aa}{a}\cdot\frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5} - \frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5} - \frac{2\pi(1-aa)^2}{(1-aa)^5}$$
$$= \frac{\pi aa(6)}{(1-aa)^5}$$

haben; für $i = 0$ wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3(10-5aaa^4)}{(1-aa)^5}$$

sein; für $i = 3$ erhalten wir

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 4\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^4(15 - 12aa + 3a^4)}{(1-aa)^5};$$

für $i = 4$ geht

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 5\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^5(21 - 21aa + 6a^4)}{(1-aa)^5}$$

hervor; für $i = 5$ gesetzt wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos 6\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^6(28 - 32aa + 10a^4)}{(1-aa)^5}$$

sein und im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}\left(\frac{i(i+3)+2}{2} - (ii-4)aa + \frac{i(i-3)+2}{2}a^4\right),$$

welche Formel leicht in diese transformiert wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}\left(\frac{(i+1)(i+2)}{2} - (i+2)(i-2)aa + \frac{(i-1)(i-2)}{2}a^4\right).$$

§18 Auf diese Weise ließe sich zu den folgenden Formeln voranschreiten, in denen der Nenner Δ^4, Δ^5, Δ^6 etc. ist; aber die Formen der Integrale würden ununterbrochen in einer solchen Weise komplizierter werden, dass kaum eine Struktur in ihnen beobachtet werden könnte, weswegen es ratsam sein wird einen anderen Weg zu beschreiten, auf welchem wir die Zahl i als gegeben annehmen und stetig von kleineren zu größeren Zahlen n voranschreiten wollen. Zuerst wollen wir also $i = 0$ nehmen und den integralen Wert dieser Formel

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

ausfindig machen.

Integration der Formel

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

$$\text{MIT } \Delta = 1 + aa - 2a\cos\varphi$$

§19 Aus dem Vorhergehenden lässt sich schließen, dass jeder Fall des Exponenten $n+1$ von den zwei vorhergehenden abhängt, sodass unter den vorgeschriebenen Integrationsgrenzen

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n}} + \beta \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

ist, wo die ganze Aufgabe darauf zurückgeht, dass die Koeffizienten α und β richtig bestimmt werden; für dieses Ziel wollen wir festlegen, dass im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n}} + \beta \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}} + \gamma \frac{\sin\varphi}{\Delta^{n}}$$

ist, welcher letzte Term natürlich für jede der beiden Integrationsgrenzen verschwindet.

§20 Man differenziere diese Gleichung nun und nach der Teilung durch $\partial\varphi$ wird die folgende Gleichung entspringen

$$\frac{1}{\Delta^{n+1}} = \frac{\alpha}{\Delta^{n}} + \frac{\beta}{\Delta^{n-1}} + \frac{\gamma\cos\varphi(1 + aa - 2a\cos\varphi) - 2\gamma an\sin^2\varphi}{\Delta^{n+1}}$$

und diese Gleichung wird mit Δ^{n+1} multipliziert in diese Form übergehen

$$\begin{aligned}1 &= \alpha(1 + aa - 2a\cos\varphi) + \beta(1 + aa)^2 - 4\beta a\cos\varphi(1 + aa)\\ &= 4\beta aa\cos^2\varphi + \gamma\cos\varphi(1 + aa - 2a\cos\varphi) - 2\gamma an\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

Weil nun

$$2\cos^2 = 1 + \cos 2\varphi \quad \text{und} \quad 2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi$$

ist, wird nach Verwendung dieser Reduktion zu der folgenden Gleichung gelangt werden

$$\begin{aligned}
1 = \alpha(1+aa) & - \qquad\qquad 2\alpha a \cos\varphi + 2\beta aa \cos 2\varphi \\
+ \beta(1+aa)^2 & - 4\beta a(1+aa)\cos\varphi + \quad \gamma a \cos 2\varphi \\
+ 2\beta aa \qquad & - \quad \gamma(1+aa)\cos\varphi + \gamma n a \cos 2\varphi \\
-\gamma a \qquad & \\
-\gamma n a. \qquad &
\end{aligned}$$

§21 Um diese Gleichung nun aufzulösen, ist es notwendig, dass so die $\cos\varphi$ wie $\cos 2\varphi$ involvierenden Terme jeweils zu Null werden; daher leiten wir aus dem letzten Term

$$2\beta aa - \gamma a + \gamma n a = 0$$

und daraus

$$\beta = \frac{\gamma(1-n)}{2a} = -\frac{\gamma(n-1)}{2a}$$

ab, welcher Wert in den mit $\cos\varphi$ behafteten Termen eingesetzt zu dieser Gleichung führt

$$-2\alpha a + 2\gamma(n-1)(1+aa) + \gamma(1+aa) = 0,$$

woher

$$2\alpha a = 2\gamma n(1+aa) - \gamma(1+aa)$$

wird; und daher wird

$$\alpha = \frac{\gamma(1+aa)(2n-1)}{2a}$$

sein. Nun setze man hier anstelle von α und β die gefundenen Werte im ersten Teil ein und wir werden zu dieser Gleichung geführt werden

$$1 = \frac{\gamma(2n-1)(1+aa)^2}{2a} - \frac{\gamma(n-1)(1+aa)^2}{2a} - \gamma a(n-1) - \gamma a - \gamma n a$$

oder

$$2a = \gamma(2n-1)(1+aa)^2 - \gamma(n-1)(1+aa)^2 - 2\gamma aa(n-1) - 2\gamma aa - 2\gamma naa$$

oder auch

$$2a = \gamma n(1+aa)^2 - 4\gamma naa,$$

woher

$$\gamma = \frac{2a}{n(1-aa)^2}$$

wird.

§22 Nachdem nun dieser Wert γ gefunden worden ist, werden wir daraus

$$\alpha = \frac{(2n-1)(1+aa)}{n(1-aa)^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{-(n-1)}{n(1-aa)^2}$$

und daher erhalten wir durch Multiplizieren mit $n(1-aa)^2$

$$n(1-aa)^2 \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = (2n-1)(1+aa)\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^n} - (n-1)\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}},$$

mit deren Hilfe aus zwei schon bekannten Fällen der folgende Fall angegeben können wird.

§23 Wir haben aber schon zuvor gefunden, dass

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$$

ist. Für die folgenden wollen wir hingegen festlegen

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi A}{(1-aa)^3}, \quad \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi B}{(1-aa)^5}, \quad \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi C}{(1-aa)^7},$$
$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi D}{(1-aa)^9}, \quad \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi E}{(1-aa)^{11}} \quad \text{etc.}$$

Dort haben wir aber schon zuvor

$$A = 1 + aa \quad \text{und} \quad B = 1 + 4aa + a^4$$

gefunden, woher alle folgenden Werte C, D, E etc. mithilfe der gefundenen Reduktion bestimmt werden können.

§24 Wir wollen also diese Werte einführen und werden die folgenden Gleichungen erlangen

$$\begin{array}{rrl} \text{I.} & A = & 1 + aa, \\ \text{II.} & 2B = & 3(1+aa)A - (1-aa)^2, \\ \text{III.} & 3C = & 5(1+aa)B - 2(1-aa)^2 A, \\ \text{IV.} & 4D = & 7(1+aa)C - 3(1-aa)^2 B, \\ \text{V.} & 5E = & 9(1+aa)D - 4(1-aa)^2 C, \\ \text{VI.} & 6F = & 11(1+aa)E - 5(1-aa)^2 D, \\ \text{VII.} & 7B = & 13(1+aa)F - 6(1-aa)^2 E, \\ \text{VIII.} & 8H = & 15(1+aa)G - 7(1-aa)^2 F \end{array}$$

etc.

§25 Die erste dieser Gleichungen gibt sofort den zuvor gefundenen Wert

$$A = 1 + aa;$$

die zweite liefert hingegen

$$2B = \begin{cases} 3 + 6aa + 3a^4 \\ -1 + 2aa - a^4, \end{cases}$$

woher

$$B = 1 + 4aa + a^4$$

wird. Darauf liefert hingegen die dritte Gleichung

$$3C = \begin{cases} 5 + 25aa + 25a^4 + 5a^6 \\ -2 + 2aa + 2a^4 - 2a^6, \end{cases}$$

woher woher man

$$C = 1 + 9aa + 9a^4 + a^6$$

findet. Für die vierte Gleichung

$$4D = \begin{cases} 7 + 70aa + 126a^4 + 70a^6 + 7a^8 \\ -3 + 6aa + 18a^4 - 6a^6 - 3a^8, \end{cases}$$

woher man

$$D = 1 + 16aa + 36a^4 + 16a^6 + a^8$$

berechnet. In gleicher Weise berechnen wir aus der fünften Gleichung

$$5E = \begin{cases} 9 + 153aa + 468a^4 + 468a^6 + 153a^8 + 9a^{10} \\ -4 + 28aa + 32a^4 - 32a^6 - 28a^8 - 4a^{10}, \end{cases}$$

woher man

$$E = 1 + 25aa + 100a^4 + 100a^6 + 25a^8 + a^{10}$$

folgert. Wir wollen auch die sechste Gleichung entwickeln, welche

$$6F = \begin{cases} 11 + 286aa + 1375a^4 + 2200a^6 + 1375a^8 + 286a^{10} + 11a^{12} \\ -5 - 70aa - 25a^4 + 200a^6 - 25a^8 - 70a^{10} - 5a^{12} \end{cases}$$

ist, und daher schließt man

$$F = 1 + 36aa + 225a^4 + 400a^6 + 225a^8 + 36a^{10} + a^{12}.$$

§26 Hier entdecken wir nicht ohne Verwunderung, dass alle Koeffizienten dieser Formen Quadratzahlen sind, deren Wurzeln in den entsprechenden Potenzen des Binoms $1 + aa$ auftauchen, und so werden wir für den folgenden Buchstaben

$$G = 1 + 7^2aa + 21^2a^4 + 35^2a^6 + 35^2a^8 + 21^2a^{10} + 7^2a^{12} + a^{14}$$

haben, welcher Buchstabe der Integralformel

$$\int \frac{\partial \varphi}{\Delta^{7+1}}$$

entspricht, sodass hier $n = 7$ ist. Wenn wir also das Integral der allgemeinen Formel

$$\int \frac{\partial \varphi}{\Delta^{n+1}}$$

als

$$= \frac{\pi V}{(1 - aa)^{2n+1}}$$

festlegen, wird der Wert des Buchstabens

$$V = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 aa + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 a^6 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 a^8 + \left(\frac{n}{5}\right)^5 a^{10} + \text{etc.}$$

sein, wobei natürlich die Symbole verwendet worden sind, mit denen wir für gewöhnlich die Binomialkoeffizienten bezeichnen, während natürlich

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n, \quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \quad \text{etc.}$$

ist.

§27 Diese Schlussfolgerung ist über Induktion quasi nur auf einer Vermutung beruhend abgeleitet worden; es wird wohl kaum jemanden gefunden, dem diese Vermutung zweifelhaft erscheint, obwohl sie noch nicht mit einem strengen Beweis bestätigt worden ist; denn es kann sicher nicht zufällig passieren, dass all diese Koeffizienten als Quadratzahlen hervorgehen und sogar als Quadrate solcher der Koeffizienten, die in der Entwicklung der Potenz $(1 + aa)^n$ auftreten; dennoch habe ich indes später gesehen, dass für diese Wahrheit ein strenger Beweis gegeben werden kann.

§28 Nachdem also dieses Bildungsgesetz festgelegt worden ist, werden sich die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc., welche wir in die Ausdrücke der Integrale eingeführt haben, in folgender Weise verhalten:

$$
\begin{aligned}
A &= 1^2 + 1^2 aa \\
B &= 1^2 + 2^2 aa + \ \ 1^2 a^4 \\
C &= 1^2 + 3^2 aa + \ \ 3^2 a^4 + \ \ 1^2 a^6 \\
D &= 1^2 + 4^2 aa + \ \ 6^2 a^4 + \ \ 4^2 a^6 + \ \ 1^2 a^8 \\
E &= 1^2 + 5^2 aa + 10^2 a^4 + 10^2 a^6 + \ \ 5^2 a^8 + \ \ 1^2 a^{10} \\
F &= 1^2 + 6^2 aa + 15^2 a^4 + 20^2 a^6 + 15^2 a^8 + \ \ 6^2 a^{10} + 1^2 a^{12} \\
G &= 1^2 + 7^2 aa + 21^2 a^4 + 35^2 a^6 + 35^2 a^8 + 21^2 a^{10} + 7^2 a^{12} + 1^2 a^{14}
\end{aligned}
$$

etc.

INTEGRATION DER ALLGEMEINEN FORMEL

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$

MIT $\Delta = 1 + aa - 2a\cos\varphi$

§29 Diese allgemeine Formel kann genauso behandelt werden wie die vorhergehende, während der Wert des Integrals in jedem Fall auch von zwei den vorhergehenden Fällen abhängt, sodass wir auch

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n}} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

setzen können, sofern die Integrale natürlich auf die beiden festgelegten Grenzen bezogen werden; weil es aber notwendig ist, dass wir die allgemeine Gleichung frei von dieser Bedingung festlegen, müssen einige Terme hinzugefügt werden, welche für jede der beiden Grenzen verschwinden; und es genügt hier auch nicht, wie zuvor einen Term hinzugefügt zu haben, sondern es werden sogar drei Terme von solcher Art hinzugefügt werden müssen, der Grund wofür bald aus der Rechnung klar werden wird; deswegen wollen wir die folgende Gleichung festlegen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n}} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

$$+\gamma \frac{\sin i\varphi}{\Delta^n} + \delta \frac{\sin(i-1)\varphi}{\Delta^n} + \varepsilon \frac{\sin(i+1)\varphi}{\Delta^n},$$

welches letzte Glied, weil i ja eine ganze Zahl ist, für jede der beiden Integrationsgrenzen verschwindet.

§30 Man differenziere diese Gleichung nun also und, nachdem der Kürze wegen $1 + aa = b$ gesetzt worden ist, dass $\Delta = b - 2a\cos\varphi$ ist, beachte man die Nenner, welche Δ^{n+1} sein werden, zusammen mit dem Element $\partial\varphi$ nicht. Zuerst bemerke man, dass

$$\Delta \cos i\varphi = b\cos i\varphi - a\cos(i-1)\varphi - a\cos(i+1)\varphi$$

ist, dann wird aber wegen

$$\Delta^2 = bb - 4ab\cos\varphi + 4aa\cos^2\varphi = 2aa + bb - 4ab\cos\varphi + 2aa\cos 2\varphi$$

auch

$$\Delta^2 \cos i\varphi = (bb + 2aa)\cos i\varphi - 2ab\cos(i-1)\varphi$$

$$-2ab\cos(i+1)\varphi + aa\cos(i-2)\varphi + aa\cos(i+2)\varphi$$

sein. Dann wird man aber

$$\partial \cdot \frac{\sin(i-1)\varphi}{\Delta^n} = i\Delta\cos i\varphi - 2na\sin i\varphi\sin\varphi$$

$$= ib\cos i\varphi - ia\cos(i-1)\varphi - ia\cos(i+1)\varphi$$

$$-na\cos(i-1)\varphi + na\cos(i+1)\varphi$$

haben. In gleicher Weise wird

$$\partial \cdot \frac{\sin(i-1)\varphi}{\Delta^n} = (i-1)b\cos(i-1)\varphi - (i-1)a\cos(i-2)\varphi$$

$$-(i-1)a\cos i\varphi - na\cos(i-2)\varphi + na\cos i\varphi$$

und schließlich

$$\partial \cdot \frac{\sin(i+1)\varphi}{\Delta^n} = (i+1)b\cos(i+1)\varphi - (i+1)a\cos i\varphi$$
$$-(i+1)a\cos(i+2)\varphi - na\cos i\varphi + na\cos(i+2)\varphi$$

sein.

§31 Hier tauchen also fünf Winkel auf, nämlich

$$i\varphi, \quad (i-1)\varphi, \quad (i+1)\varphi, \quad (i-2)\varphi \quad \text{und} \quad (i+2)\varphi,$$

woher der Grund klar ist, warum drei absolute Terme hinzugefügt worden sind; also stelle man das Differential, nach der Entwicklung der einzelnen Terme, spaltenweise in folgender Weise dar, sodass die linke Seite, welche $\cos i\varphi$ ist, dem folgenden Ausdruck gleich wird:

$\cos i\varphi$	$\cos(i-1)\varphi$	$\cos(i+1)\varphi$	$\cos(i-2)\varphi$	$\cos(i+2)\varphi$
$+\alpha a$	$-\alpha a$	$-\alpha a$		
$+\beta(bb+2aa)$	$-2\beta ab$	$-2\beta ab$	$+\beta aa$	$+\beta aa$
$+\gamma ib$	$-\gamma ia$	$-\gamma ia$		
	$-\gamma na$	$+\gamma na$		
$-\delta(i-1)a$	$+\delta(i-1)b$	$+\varepsilon(i+1)b$	$-\delta(i-1)a$	$-\varepsilon(i+1)a$
$+\delta na$			$-\delta na$	$+\varepsilon na$
$-\varepsilon(i+1)a$				
$-\varepsilon na$				

§32 Hier müssen also alle vier letzten Spalten jeweils zu Null gemacht werden, weil allein die erste Spalte der linken Seite gleich werden kann; wir wollen also mit den zwei letzten Spalten beginnen, woher wir

$$\delta = \frac{\beta a}{i+n-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\beta a}{i-n+1}$$

ableiten. Nach Einsetzen dieser Werte wird für die zweite Spalte

$$-2\beta ab+\delta(i-1)b=\frac{\beta ab(1-i-2n)}{i+n-1}=-\frac{\beta ab(i+2n-1)}{i+n-1}$$

sein. Für die dritte Spalte wird hingegen

$$-2\beta ab+\varepsilon(i+1)b=-\frac{\beta ab(i-2n+1)}{i-n+1}$$

sein; daher liefern diese beiden Spalten uns diese zwei Gleichungen

$$-\alpha a-\gamma(i+n)a-\frac{\beta ab(i+2n-1)}{i+n-1}=0,$$
$$-\alpha a-\gamma(i-n)a-\frac{\beta ab(i-2n+1)}{i-n+1}=0.$$

§33 Man ziehe die zweite dieser zwei Gleichungen von der ersten ab und es wird

$$-2\gamma na-\frac{2\beta inab}{ii-(n-1)^2}=0$$

hervorgehen, woher wir

$$\gamma=-\frac{\beta ib}{ii-(n-1)^2}$$

berechnen. Und daher kann weiter aus der zweiten der Wert von α abgeleitet werden, weil

$$\alpha a=-\gamma(i+n)a-\frac{\beta ab(i+2n-1)}{i+n-1}$$

ist; es wird

$$\alpha=\frac{\beta i(i+n)b}{ii-(n-1)^2}-\frac{\beta(i+2n-1)b}{i+n-1}=\frac{\beta(2nn-3n+1)b}{ii-(n-1)^2}=\frac{\beta(n-1)(2n-1)b}{ii-(n-1)^2}$$

sein.

§34 Man setze nun diese Werte in der ersten Spalte ein und es wird die folgende Gleichung entspringen

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\beta(n-1)(2n-1)bb}{ii-(n-1)^2} & +\ 2\beta aa \\ +\beta bb & -\ \dfrac{\beta(i-n-1)aa}{i+n-1} \\ -\dfrac{\beta iibb}{ii-(n-1)^2} & -\dfrac{\beta(i+n+1)aa}{i-n+1}\end{array}\right\} = 1.$$

Indem man also mit $ii-(n-1)^2$ multipliziert, wird diese Gleichung hervorgehen

$$\begin{aligned} ii-(n-1)^2 = 2\beta aaii(-(n-1)^2) &+ \beta bb(n-1)(2n-1) \\ -\beta aa(i-n-1)(i-n+1) &+ \beta bb(ii-(n-1)^2) \\ -\ \beta aa(i+n+1)(i+n-1) &- \beta iibb. \end{aligned}$$

Aber nach Vereinfachung wird der Term βaa mit

$$2(ii-(n-1)^2)-(i-n)^2+1-(i+n)^2+1$$

oder mit

$$-4n(n-1)$$

multipliziert werden; βbb wird dahingegen mit

$$(n-1)(2n-1)+ii-(n-1)^2-ii$$

oder mit

$$n(n-1)$$

multipliziert werden und so wird

$$\begin{aligned} ii-(n-1)^2 &= 4\beta n(n-1)aa+\beta n(n-1)bb \\ &= \beta n(n-1)(bb-4aa) \end{aligned}$$

sein. Weil wir also $b = 1 + aa$ gesetzt haben, wird

$$bb - 4aa = (1 - aa)^2$$

sein; als logische Konsequenz finden wir daraus

$$\beta = \frac{ii - (n-1)^2}{n(n-1)(1-aa)^2}.$$

§35 Nachdem nun der Wert des Buchstaben β gefunden worden ist, leiten wir aus ihm den Wert

$$\alpha = \frac{(2n-1)b}{n(1-aa)}$$

ab; die Werte der Buchstaben γ, δ und ε gehen nicht weiter ein und die Reduktion, die wir suchen, wird

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n}} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

sein oder nach Wegschaffen der Brüche wird man diese Gleichung

$$n(n-1)(1-aa)^2 \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} = (n-1)(2n-1)(1+aa) \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n}}$$
$$+ (ii - (n-1)^2) \int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

haben, welche Gleichung im Fall $i = 0$ auf die Reduktion des vorhergehenden Abschnitts zurückgeht.

§36 Nachdem diese allgemeine Reduktion gefunden worden ist, wollen wir für ihre Anwendung, weil

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}, \quad \text{mit} \quad n = 0$$

ist, für die folgenden festlegen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^3}A, \quad \text{mit } n=1,$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}B, \quad \text{mit } n=2,$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^7}C, \quad \text{mit } n=3,$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^9}D, \quad \text{mit } n=4,$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{11}}A, \quad \text{mit } n=5,$$

und daher sei im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}V;$$

oben haben wir aber schon gefunden, dass

$$A = i+1-(i-1)aa$$

oder, indem man die Terme positiv darstellt,

$$A = 1+i+(i-1)aa$$

ist.

§37 Wenn wir in unserer gefundenen Reduktion $n=1$ gesetzt hätten, gäbe sie

$$ii\int \partial\varphi \cos i\varphi = 0,$$

was zuerst im Fall $i=0$ wahr ist, dann aber wegen

$$\int \partial\varphi \cos i\varphi = \frac{1}{i}\sin i\varphi = 0,$$

was freilich aber sehr klar ist. Wir wollen also vom Fall $n=2$ aus beginnen und durch die folgenden Werte

$$n = 3, \quad n = 4, \quad n = 5 \quad \text{etc.}$$

durchgehend werden wir die folgenden Gleichungen erlangen:

I. Für $n = 2$, ist

$$2 \cdot 1B = 1 \cdot \ 3(1 + aa)A + (ii - \ 1)(1 - aa)^2.$$

II. Für $n = 2$, ist

$$3 \cdot 2C = 2 \cdot \ 5(1 + aa)B + (ii - \ 4)(1 - aa)^2 A.$$

III. Für $n = 3$, ist

$$4 \cdot 3D = 3 \cdot \ 7(1 + aa)C + (ii - \ 9)(1 - aa)^2 B.$$

IV. Für $n = 4$, ist

$$5 \cdot 4E = 4 \cdot \ 9(1 + aa)D + (ii - 16)(1 - aa)^2 C.$$

V. Für $n = 5$, ist

$$6 \cdot 5F = 5 \cdot 11(1 + aa)E + (ii - 25)(1 - aa)^2 D.$$

etc.

§38 Weil also

$$A = 1 + i + (1 - i)aa$$

ist, wird für die erste Gleichung

$$(1 + aa)A = 1 + i + 2aa + (1 - i)a^4$$

sein; zum Dreifachen von dieser muss man

$$(ii - 1)(1 - aa)^2 = ii - 1 - 2(ii - 1)aa + (ii - 1)a^4$$

addieren, woher zuerst der absolute Term $= (2 + i)(1 + i)$ entspringt, darauf wird der Koeffizient von aa dann $8 - 2ii$ sein, der Koeffizient von a^4 wird hingegen $(2 - i)(1 - i)$ sein, woher wir den Buchstaben

$$B = \frac{(2 + i)(1 + i)}{1 \cdot 2} + (2 + i)(2 - i)aa + \frac{(2 - i)(1 - i)}{1 \cdot 2}a^4$$

erschließen.

§39 Diese Form führt uns zu den Binomialkoeffizienten, welche, wie wir schon bemerkt haben, wir mit eigenen Symbolen darstellen, und so wird mit solchen Symbolen

$$A = \left(\frac{1+i}{1}\right) + \left(\frac{1-i}{1}\right) aa$$

sein, dann aber

$$B = \left(\frac{2+i}{2}\right) + \left(\frac{2+i}{1}\right)\left(\frac{2-i}{2}\right) aa + \left(\frac{2-i}{2}\right) a^4.$$

Wir wollen aber sehen, wie sich dieses Gesetz bei den folgenden Werten verhalten wird.

§40 Wir wollen also die zweite Gleichung entwickeln, für welche die folgenden Multiplikationen durchgeführt werden müssen

$$10\left(\frac{2+3i+ii}{2} + (4-ii)aa + \frac{2-3i+ii}{2}a^4\right) \quad \text{mit} \quad 1+aa,$$

aber das letzte Glied erfordert diese Multiplikation

$$(ii-4)(1-2aa+a^4) \quad \text{mit} \quad 1+i+(1-i)aa;$$

daher entspringt zuerst dieser absolute Term

$$10+15i+5ii+(ii-4)(1+i),$$

welcher auf diese Form $(2+i)(1+i)(3+i)$ zurückgeführt wird. Für den Term aa wird aber

$$\begin{aligned} 40-10ii+5(2+i)(1+i)+(ii-4)(-2(1+i)+1-i) \\ = (4-ii)(11+3i)+5(2+i)(1+i) \end{aligned}$$

sein, welcher Ausdruck auf diesen zurückgeführt wird

$$(2+i)(27-3ii) = 3(2+i)(3+i)(3-i).$$

Weiter wird der Koeffizient von a^4

$$(2-i)(27-3ii) = 3(2-i)(3+i)(3-i)$$

sein. Schließlich wird der Koeffizient von a^6 dann $(2-i)(1-i)(3-i)$ sein.

§41 Nachdem also diese Rechnung durchgeführt worden ist, werden wir

$$3 \cdot 2C = (3+i)(2+i)(1+i) + 3(3+i)(2+i)(3-i)aa$$
$$+3(3+i)(2-i)(3-i)a^4 + (3-i)(2-i)(1-i)a^6$$

haben, welche Form in bequemer Weise auf diese Binomialkoeffizienten zurückgeführt wird

$$C = \left(\frac{3+i}{3}\right) + \left(\frac{3+i}{2}\right)\left(\frac{3-i}{1}\right)aa + \left(\frac{3+i}{1}\right)\left(\frac{3-i}{2}\right)a^4 + \left(\frac{3-i}{3}\right)a^6.$$

Diese Struktur bestätigt die aus den vorhergehenden Fällen abgeleitete Vermutungen in starker Weise und es kann kein Zweifel bestehen, dass die folgenden Buchstaben diese Werte erhalten:

$$D = \left(\frac{4+i}{4}\right) + \left(\frac{4+i}{3}\right)\left(\frac{4-i}{1}\right)aa + \left(\frac{4+i}{2}\right)\left(\frac{4-i}{2}\right)a^4$$
$$+ \left(\frac{4+i}{1}\right)\left(\frac{4-i}{3}\right)a^6 + \left(\frac{4-i}{4}\right)a^8,$$
$$E = \left(\frac{5+i}{5}\right) + \left(\frac{5+i}{4}\right)\left(\frac{5-i}{1}\right)aa + \left(\frac{5+i}{3}\right)\left(\frac{5-i}{2}\right)a^4$$
$$+ \left(\frac{5+i}{2}\right)\left(\frac{5-i}{3}\right)a^6 + \left(\frac{5+i}{1}\right)\left(\frac{5-i}{4}\right)a^8 + \left(\frac{5-i}{5}\right)a^{10}$$

etc.

Dennoch ist indes zu gestehen, dass diese außerordentliche Struktur uns sich nur über eine Vermutung gezeigt hat; ein strenger Beweis von ihr wird immer noch vermisst.

§42 Weil wir also im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{von} & \varphi = 0 \\ \text{bis} & \varphi = 180^\circ \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

gesetzt haben, wird nun

$$V = \left(\frac{n+i}{n}\right) + \left(\frac{n+i}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) aa + \left(\frac{n+i}{n-2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right) a^4$$
$$+ \left(\frac{n+i}{n-3}\right)\left(\frac{n-i}{3}\right) a^6 + \left(\frac{n+i}{n-4}\right)\left(\frac{n-i}{4}\right) a^8 + \text{etc.}$$

sein, woher man sofort die im vorhergehenden Abschnitt erschlossene Form abgeleitet wird, wo $i = 0$ war. Für diesen Fall wird nämlich

$$V = \left(\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n}{1}\right) aa + \left(\frac{n}{n-2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) a^4 + \left(\frac{n}{n-3}\right)\left(\frac{n}{3}\right) a^6 + \text{etc.}$$

sein. Weil aber für Symbole von dieser Art immer

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n}{n-p}\right)$$

gilt, wird genauso, wie wir oben vermutet haben,

$$V = \left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)^2 aa + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 a^6 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 a^8 + \text{etc.}$$

sein. Daher wird es also der Mühe wert sein, das folgende Theorem zu formulieren.

Allgemeines Theorem

§43 *Wenn die Integralformel*

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1 + aa - 2a\cos\varphi)^{n+1}}$$

von der Grenze $\varphi = 0$ *bis hin zur Grenze* $\varphi = 180^\circ$ *erstreckt wird, wird der Wert des Integrals immer eine solche Form haben*

$$\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

mit

$$V = \left(\frac{n+i}{i}\right) + \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right) aa + \left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right) a^4$$

$$+\left(\frac{n+i}{i+3}\right)\left(\frac{n-i}{3}\right)a^6+\left(\frac{n+i}{i+4}\right)\left(\frac{n-i}{4}\right)a^8+etc.,$$

solange i eine ganze positive oder negative Zahl war, weil ja auch im zweiten Fall diese Form mit der Wahrheit verträglich entdeckt wird, sodass dieser Ausdruck sich weiter erstreckt als alle Spezialfälle zusammengenommen, aus denen wir die Vermutung gebildet haben; denn in allen Spezialfällen bezeichnete der Buchstabe i notwendigerweise nur ganze positive Zahlen.